Première partie : électrostatique

L'espace est rapporté au repère cartésien (O,x,y,z) et on se situe dans l'air (assimilé au vide quant aux propriétés diélectriques).

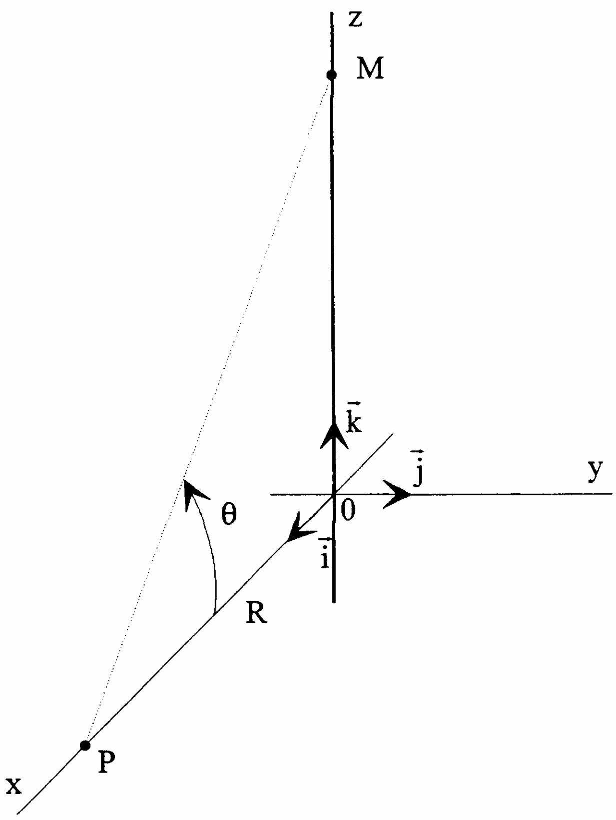

Figure 1

1.1. Etude d'un fil infini uniformément chargé.
On considère un fil rectiligne illimité porté par (Oz), portant une distribution uniforme de charge $\lambda > 0$ (figure 1).

I.1.1. Déterminer la direction du champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace par des considérations de symétrie.

I.1.2. On fixe le point M sur le fil, à l'altitude z, et le point P sur l'axe Ox, tel que OP = $R > 0$. Un petit élément de charge $dq = \lambda dz$ au voisinage du point M crée au point P un champ élémentaire $d\vec{E}$. Exprimer $d\vec{E}$ en fonction de ε_0 , R, λ et $d\theta$, et d'un vecteur unitaire à préciser.

I.1.3. En déduire le champ $\vec{E}$ total au point P par intégration de l'expression précédente.

I.1.4. Retrouver ce résultat à partir du théorème de Gauss.

I.2. Etude d'une plaque infinie uniformément chargée.
On considère maintenant une plaque infinie dans le plan O,y,z, uniformément chargée avec la densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

I.2.1. En décomposant ce plan en de minces rubans d'axe (Oz), de largeur dy, d'abscisse x, et en utilisant le résultat relatif à un fil, trouver l'expression du champ $\vec{E}$ au point P.

I.2.2. Justifier à partir des symétries l'orientation du champ $\vec{E}$. Retrouver alors le résultat de (I.2.1) à partir du théorème de Gauss.

I.2.3. A.N. Calculer $\|\vec{E}\|$ pour $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2}.

I.3. Etude de deux plaques infinies uniformément chargées.
On considère maintenant deux plaques infinies A et B, la première dans le plan O,y,z, uniformément chargée avec la densité surfacique de charge $\sigma > 0$, et la deuxième parallèle à la première translatée du vecteur $e.\vec{i}$ chargée avec la densité surfacique de charge $-\sigma$.

I.3.1. Exprimer les champs $\overrightarrow{E_A}$ et $\overrightarrow{E_B}$ créés en tout point de l'espace par les plaques A et B.

I.3.2. En utilisant le théorème de superposition, exprimer le champ $\vec{E}$ à l'extérieur et à l'intérieur des deux plaques. Dessiner quelques lignes de champ.

I.3.3. Déterminer l'expression de la différence de potentiel $V = V_A - V_B$.

I.3.4. A.N. Calculer $V_A - V_B$ pour $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2} et e = 5 µm.

I.3.5.Sur chacun des plans, isolons par la pensée deux régions identiques d'aire S. On rappelle que la capacité C du condensateur formé par les deux surfaces S en regard est telle que

$$Q = \sigma S = CV$$

En déduire la capacité C du condensateur formé par les deux surfaces S en regard.
Dans la suite du problème on négligera les effets de bord, et pour un condensateur ayant des armatures de surface S, espacées de e, on gardera cette expression pour C.

I.3.6. Exprimer la force électrostatique $\vec{F}$ qui s'exerce sur la surface S d'une plaque en fonction de ε_0, σ et S (on précisera sens et grandeur).

I.3.7. En déduire alors l'expression de la pression électrostatique P_{el} définie comme le module de la force par unité de surface (F/S) *:* on notera que cette pression tend à arracher des charges à la surface.

I.3.8. A.N. Calculer P_{el} pour $\sigma = 7{,}11.10^{-5}$ C.m^{-2} .

Deuxième partie : étude d'un condensateur

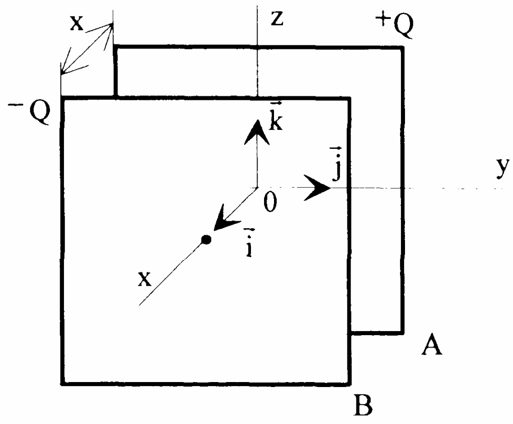

Figure 2

Dans cette partie on considère un condensateur plan dont une armature (armature B) est mobile et l'autre est fixe (armature A). Les armatures sont dans des plans parallèles au plan O,y,z (figure 2). On se situe dans l'air (dont les propriétés diélectriques sont considérées comme celles du vide).
Le mouvement de l'armature mobile est possible dans la direction Ox. Les armatures du condensateur sont espacées d'une distance x variable, et les surfaces en regard valent S. En valeur absolue, les armatures sont chargées à la valeur *Q*.
Un opérateur déplace l'armature mobile de façon réversible de la quantité dx, c'est à dire suffisamment lentement pour que la transformation soit quasi statique (à tout moment il y a équilibre statique entre l'effort $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}.\vec{i}$ de l'opérateur sur l'armature mobile et la force électrostatique $\overrightarrow{F_{el}} = F_{el}.\vec{i}$ de l'armature fixe sur l'armature mobile). On note δW_{op} le travail élémentaire fourni par l'opérateur au système. On note δW_{el} le travail élémentaire de la force électrostatique. On note E l'énergie électrostatique du condensateur.

II.1. Etude à charge *Q* constante

II.1.1. Montrer que l'énergie électrostatique d'un condensateur de charge *Q* et de capacité C est $\mathsf{E} = Q^2/2C$. Déterminer alors E en fonction de *Q*, S, x.
Indication : l'énergie électrostatique E est égale au travail fourni par l'opérateur pour apporter les charges de l'infini jusque sur les armatures. On pourra considérer des états intermédiaires où les charges sont yQ et le potentiel yV (y < 1).

Il. 1.2. Quelle relation existe entre δW_{op} et $d\mathsf{E}$ *?* De même, quelle relation existe entre δW_{el} et $d\mathsf{E}$ *?*

II.1.3. En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{F_{op}}$.

II.1.4. En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{F_{el}}$.

II.2. Etude à tension constante.

Le condensateur est maintenant relié à un générateur de tension parfait qui impose une tension constante $U = V_A - V_B$, aux bornes du condensateur. On note δW_G l'énergie élémentaire fournie par le générateur au système lors du déplacement. On note δQ la variation de charge du condensateur.

II.2.1. Exprimer δW_G et $d\mathcal{E}$ en fonction de δQ et de U. En déduire la relation entre δW_G et $d\mathcal{E}$.. On exprimera $\mathcal{E}$ en fonction de U, S, x.

II.2.2. Quelle relation lie δW_G, δW_{op} et $d\mathcal{E}$?

II.2.3. En déduire l'expression de $\overrightarrow{F_{op}}$ et $\overrightarrow{F_{el}}$ en fonction de la dérivée de $\mathcal{E}$ par rapport à x, puis en fonction de U et des données géométriques du problème. Comparer aux résultats de la question II. 1.

II.2.4. Calculer $\left\|\overrightarrow{F_{el}}\right\|$ pour U = 40V, x = 5 µm et S = 12,56 mm^2.

II.3. Etude de l'équilibre des plaques d'un condensateur et d'un ressort.

On remplace maintenant l'opérateur par un ressort d'axe Ox, de raideur k et de longueur à vide L_o. Une des extrémités du ressort est fixée sur le point O_1 tel que $OO_1 = e + L_0$ et l'autre extrémité est fixée sur l'armature mobile B. Lorsque le condensateur est déchargé, la distance inter-armatures vaut e, et la longueur du ressort est L_0 (figure 3).

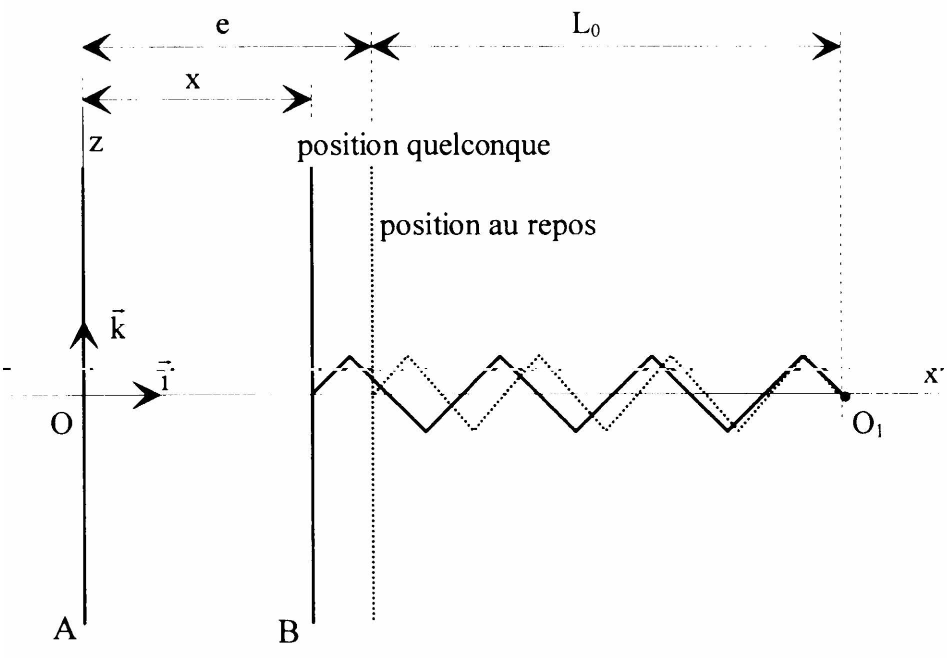

Figure 3

II.3.1. Le générateur de tension parfait impose toujours la tension constante $U = V_A - V_B$ aux bornes du condensateur.

II.3.1.1. Lorsque l'armature mobile est dans une position quelconque, le ressort exerce un effort $\overrightarrow{F_R} = F_R.\vec{i}$ sur l'armature mobile. Donner l'expression de $\overrightarrow{F_R}$ en fonction de k, x et e.

II.3.1.2. Montrer que x = 0 correspond à une position d'équilibre stable mathématiquement évidente, mais irréaliste.

En pratique on colle une cale isolante de faible épaisseur e_1 et de surface S sur une armature du condensateur. Pourquoi ?

II.3.1.3. Tracer sur un même graphe $\left\|\overrightarrow{F_R}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{F_{el}}\right\|$ pour $0 < x < e$ (on utilisera le résultat de la question II.2.3.) en distinguant les différentes positions relatives possibles des deux courbes. En déduire l'existence et la stabilité des positions d'équilibre de l'armature mobile (autres que $x = 0$).

II.3.1.4. Montrer qu'il existe une tension critique que l'on notera U_{c1} au dessus de laquelle il n'y a pas d'autre position d'équilibre que $x = 0$. Déterminer Uc1 et la position d'équilibre limite correspondante.

II. 3.1.5. A.N. Calculer U_{c1} pour $k = 1{,}18610^4\ \mathrm{Nm^{-1}}$ et $e = 5\ \mu\mathrm{m}$.

II.3.2. Prise en compte de la cale isolante.

On admettra que la cale isolante forme un condensateur de capacité $\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{e}$.

Ce condensateur est en série avec un condensateur à air d'épaisseur $e - e_1$.

II.3.2.1. Montrer alors que l'on peut considérer un condensateur équivalent à air, à condition de remplacer la distance inter-armatures e par une distance inter-armatures équivalente $e_{equi} = e - e_1\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$.

II.3.2.2. Déterminer l'expression de la nouvelle tension critique .

II.3.2.3. A.N. Calculer U_{c2} pour $\varepsilon_r = 12$ et $e_1 = 0{,}5\ \mu\mathrm{m}$.

II.3.2.4. Dans ces conditions, lorsque les deux armatures sont collées, montrer qu'elles restent collées tant que U reste supérieure à une tension critique U_{c3} que l'on déterminera.

II.3.2.5. A.N. Calculer U_{c3} pour $\varepsilon_r = 12$ et $e_1 = 0{,}5\ \mu\mathrm{m}$.

II.3.2.6. On fait croître la tension U de 0 jusqu'à $2U_{c2}$ et ensuite on la fait décroître jusque à 0. Représenter l'évolution de la distance inter-armatures x en fonction de la tension U.

<u>Troisième partie : Etude d'un condensateur à membrane</u>

III.1. Déformation d'une membrane circulaire.

Une membrane circulaire d'axe (Oz) de rayon R et d'épaisseur h est encastrée sur sa périphérie, en $z = 0$. On suppose que les conditions d'attache sont les mêmes sur tout le pourtour de la membrane. Cette membrane est à l'interface de deux chambres; elle est soumise à une différence de pression constante $P_1 - P_2 = p$. On travaille en coordonnées cylindriques et r représente la distance à l'axe Oz. w(r) représente la déformée de la surface moyenne de la membrane (figure 4, l'échelle verticale n'est pas du tout respectée pour des raisons de lisibilité).

Dans ces conditions la déformation w s'écrit : $w(r) = \frac{p}{64D}\left(R^2 - r^2\right)^2$ où D est une constante caractéristique des propriétés mécaniques de la membrane.

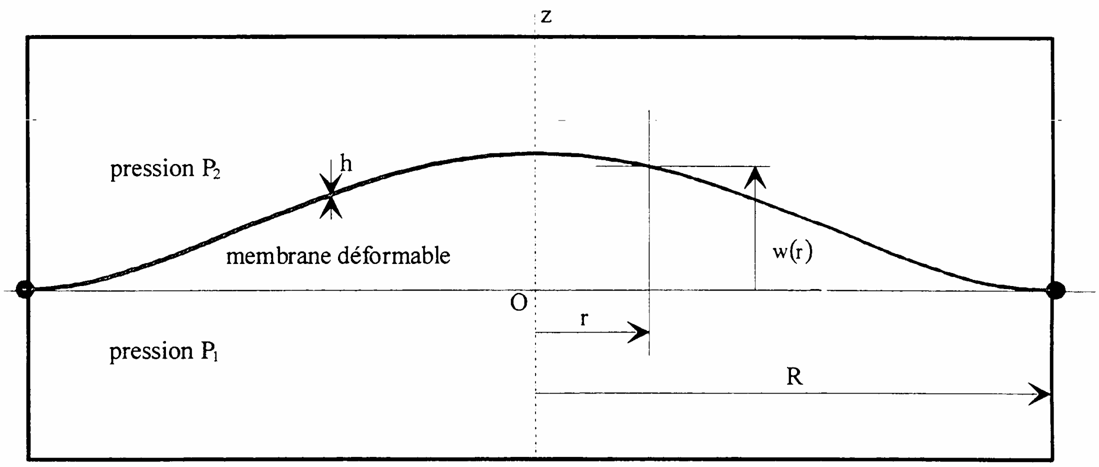

Figure 4

III.1.1. Déterminer le maximum de la déformée en fonction de p, R, et D.

III.1.2. A.N. Calculer le maximum de la déformée pour une membrane en silicium où R = 2 mm, p = 283 Pa, D = 2,36.10^{-4} J.

III.1.3. A partir de l'expression de w(r), il est possible de définir, en tout point de la membrane, un ressort d'axe (Oz) de raideur par unité de surface κ(r) modélisant la composante selon (Oz) des forces internes de la membrane lors de la déformation.

On pose $\kappa(r)=\frac{p}{w(r)}$. Justifier cette modélisation.

III.1.4. Calculer κ(0) avec les valeurs du III.1.2.

III.2. Etude d'un condensateur à membrane.

La membrane est maintenant une armature d'un condensateur, l'autre étant rigide. On a aussi $P_1 = P_2$ quelque soit la position de la membrane. Lorsque la membrane est au repos, la distance entre les armatures est constante et vaut e. Lorsque l'on applique une tension U aux bornes du condensateur, la membrane se déforme (figure 5).

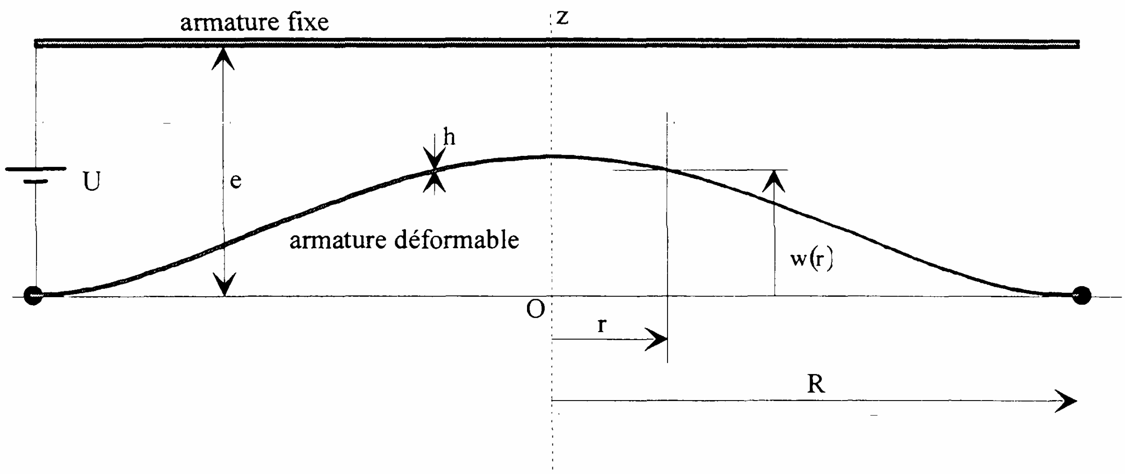

Figure 5

On supposera que le champ électrique reste perpendiculaire aux armatures du condensateur. Pour déterminer la déformée de la membrane on admet que l'on peut utiliser le processus itératif suivant: On calcule la déformée initiale $(w(r))_0$ en supposant que la pression p, remplacée ici par la pression électrostatique, est uniforme (on suppose que la distance inter-armatures vaut e), et on la note P_0. On donne $P_0 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$. σ est la densité superficielle de charge sur l'armature fixe.

Compte tenu de cette déformée, la pression électrostatique est modifiée. On obtient sa valeur P_1 en remplaçant e dans la formule de P_0 par $[e-(w(r))_0]$. De là on calcule la nouvelle déformée $(w(r))_1$ en remplaçant P_0 dans la formule de $(w(r))_0$ par P_1. En recommençant le processus on trouve $(w(r))_n$ en fonction de $(w(r))_{n-1}$. On admet que la récurrence converge vers une bonne approximation de la déformée.

III.2.1. En admettant que la pression électrostatique reste uniforme égale à P_0 (on néglige la variation de l'espace entre les plaques du condensateur), exprimer P_0 en fonction de ε_0, U et e. Donner alors la déformée $(w(r))_0$ en fonction de ε_0, U, e, D, R et r.

III.2.2. Donner alors l'expression de la pression électrostatique corrigée P_1 en fonction de $(w(r))_0$, ε_0, U et e.

III.2.3. En déduire l'expression de $w(r))_1$ en fonction de $(w(r))_0$ et de e.

III.2.4. En poursuivant le processus, exprimer la relation qui existe entre $(w(r))_n$, $(w(r))_{n-1}$ et e.

III.2.5. En admettant que $(w(r))_n$ tend vers la solution w(r), montrer que w(r) est solution d'une équation du troisième degré du type :

$$(w(r))^3 + a(w(r))^2 + b\,w(r) + c(w(r))_0 = 0$$

Donner les coefficients a, b, c de cette équation.

On ne cherchera pas les racines cette équation mais on admet le résultat algébrique suivant :

une seule racine convient si $(w(r))_0 < \frac{4e}{27}$ *dont l'expression assez complexe est :*

$$w(r) = \frac{2e}{3}\left[1-\cos\left(\frac{1}{3}\mathrm{Arcos}\left(1-\frac{27\varepsilon_0 U^2\left(R^2-r^2\right)^2}{256e^3 D}\right)\right)\right]$$

On raisonnera par analogie avec les résultats de II.3.1.4 . Pour U supérieure à une valeur critique que l'on notera ici U_{c4}, il n'y a pas d'équilibre stable pour la membrane, et on observe un collage entre les armatures. C'est évidemment w(0)qui constitue l'épaisseur critique à prendre en compte. Montrer que la condition critique est w(0) = e/3 et déterminer Uc4.

III.2.7. A.N. Calculer U_{c4} pour: R = 2mm, D = 2,36.10^{-4} J.