A propos des incertitudes expérimentales

Pour évaluer l'incertitude sur un résultat $x = f(a)$ calculé à partir d'une grandeur mesurée a, deux approches sont possibles.

La première solution consiste à effectuer les calculs avec les extrêmes de l'intervalle d'erreur. Si la mesure a pour valeur

$$a \pm \Delta a$$

alors la « valeur réelle » est supposée être dans l'intervalle $[a-\Delta a;a+\Delta a]$. On calcule donc ici

$$x_1 = f(a-\Delta a)$$
$$x_2 = f(a+\Delta a)$$

et, selon l'ordre de x_1 et de x_2, on prend $[x_1;x_2]$ ou $[x_2;x_1]$ comme intervalle d'erreur.
Cette méthode n'est valable que si la loi est monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante) sur l'intervalle $[a-\Delta a; a+\Delta a]$.
Pour Δa « assez petit », on utilise alors un développement limité du premier ordre : on remplace la loi f par sa « tangente » pour estimer l'erreur :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

Si l'on remplace x par $a + \Delta a$, on a alors

$$f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a)\cdot\Delta a$$

On peut donc estimer

$$\mathbf{\Delta x \approx f'(a) \cdot \Delta a}$$

S'il y a plusieurs grandeurs mesurées a_1, a_2, … on ajoute les incertitudes Δx_i correspondantes.

La deuxième solution est une approche statistique : lorsqu'on mesure plusieurs fois une même grandeur x, on trouvera des valeurs différentes. En cas d'absence d'erreur systématique, un très grand nombre de mesures se répartissent suivant une courbe de Gauss représentant la densité de probabilité P qu'une mesure donne le résultat x :

$$P(x) = P_{max} \exp\left(\frac{-(x-X)^2}{2\sigma^2}\right)$$, σ étant l'écart type et X la valeur la plus probable.

La probabilité d'obtenir la valeur x_0 à dx près est alors $P(x_0)dx$. Pour reconstituer la gaussienne, il faudrait disposer d'un nombre infini de mesures, ce qui n'est pas possible pratiquement. Une méthode basée sur la loi de Student, permet d'estimer X et σ pour un nombre fini n de mesures donnant les valeurs x_i.

Les meilleurs estimateurs sont : pour X : $m = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$ et pour σ : $s = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - m)^2}{n-1}}$, alors l'intervalle de confiance de X est estimé par :

$$\boxed{m - t\frac{s}{\sqrt{n}} \leq X \leq m + t\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

où t dépend du nombre de mesures et du niveau de confiance :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	40	50	∞
$t_{0,95}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,20	2,16	2,13	2,11	2,09	2,06	2,04	2,02	2,01	1,96
$t_{0,99}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,11	3,01	2,95	2,90	2,86	2,80	2,76	2,70	2,68	2,58